Measure Theory

Notes based on Book: Measure Theory by Donald L. Cohn

Last updated: **September 15, 2025**

Contents

Chapter 1: Measures

X 是一个集合，$f: X \to \mathbb{R}$ 是一个我们希望进行积分的函数，因此我们需要处理 X 的子集的大小，因此在这一章，我们需要引入测度，测度是处理这类集合大小问题的基本工具。

这章的前两节是抽象但是基础的内容，分别介绍了 σ-代数和测度，我们对 σ-代数内的集合讨论测度。第三节介绍了构造测度的一般技术，第四节介绍了 Lebesgue 测度的基本性质。最后在第五节和第六节，我们将介绍一些处理测度与 σ-代数的额外基础技巧。

1.1 Algebras and Sigma-Algebras

Algebra Definition 1.1.1

令 X 为任意集合。若 X 的**子集族** $\mathcal{A}$ 满足下列条件，则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的一个 **代数/Algebra**：

- $X \in \mathcal{A}$;
- 对每个 $A \in \mathcal{A}$，其补集 $A^c \in \mathcal{A}$;
- 对任意有限列 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$，有 $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$;
- 对任意有限列 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$，有 $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$。

当然，在后三条，我们也要求了 $\mathcal{A}$ 在取补、有限并与有限交下封闭。利用 $\bigcap_{i=1}^n A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)^c$，我们可以知道 取补和有限并封闭蕴含有限交封闭，因此**可以只通过前三条定义代数**。

Sigma-Algebra Definition 1.1.2

令 X 为任意集合。若 X 的**子集族** $\mathcal{A}$ 满足下列条件，则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的一个 **σ-代数/σ-Algebra**：

- $X \in \mathcal{A}$;
- 对每个 $A \in \mathcal{A}$，其补集 $A^c \in \mathcal{A}$;
- 对任意可数列 $\{A_i\}$（$\forall A_i, A_i \in \mathcal{A}$），有 $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$;
- 对任意可数列 $\{A_i\}$（$\forall A_i, A_i \in \mathcal{A}$），有 $\bigcap_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$。

因此，X 上的 σ-代数就是一个包含 X 的子集族，且要求在取补、可数并与可数交下封闭。与代数情形相同，也可仅用前三条或者第一、二、四条下等价定义。下面陈述是显然的：

- 每个 X 上的 σ-代数都是 X 上的代数，因为有限并可视为特殊构造下的可数并。
- 可以将上述两个定义的第一条改成 $\varnothing \in \mathcal{A}$，因为 $\varnothing \in \mathcal{A} \iff X \in \mathcal{A}$。
- 对于所有 X 上的非空的、在取补以及有限并下封闭的子集族 $\mathcal{A}$，有 $X \in \mathcal{A}$，这是因为 $X = A \cup A^c$，因此也可以使用 $\mathcal{A}$ 非空替代条件 $X \in \mathcal{A}$。

若 $\mathcal{A}$ 是 X 上的 σ-代数，有时把集合 $E \in X$ 称为 **$\mathcal{A}$-可测/$\mathcal{A}$-measurable**。

Some Families that are or are not Algebras or Sigma-Algebras Example 1.1.1

- X 为无限集，令 $\mathcal{A}$ 为 X 的所有满足 A 或 A^c 有限的 X 的子集全体。则 $\mathcal{A}$ 是 X 上的代数，但不是 σ-代数。
  - $\mathcal{A}$ 是 X 上的代数，这点非常好验证，因为有限并并不改变任何性质；
  - $\mathcal{A}$ 不是 σ-代数，如果我取一堆 X 的子集，其分别只有一个元素，那么显然其可数并不是有限的，且其可数并的补集并不能确定一定是有限的，可以在自然数集中找到反例。
- X 为不可数集，令 $\mathcal{A}$ 为 X 的所有可数子集全体。则 $\mathcal{A}$ 不含 X，且在取补下不封闭；因此不是代数。
- 令 $\mathcal{A}$ 为所有可表示为有限个 $\mathbb{R}$ 上区间的并构成的集合，区间类型为 $(a, b]$、$(a, +\infty)$ 或 $(-\infty, b]$。则很容易检验 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的代数，但不是 σ-代数。
  - 可以证明有界开区间 (a, b) 是 $\mathcal{A}$ 中集合的可数并，但是本身并不在 $\mathcal{A}$ 中。

下面考虑一下构造 σ-代数的方法。

Proposition 1.1.1

令 X 为一个集合，则 X 上任意的非空 σ-代数族的**交**仍是 X 上的一个 σ-代数。

Proof of Proposition 1.1 Proof 1.1.1

令 $\mathcal{C}$ 为 X 上一个非空的 σ-代数族，令 $\mathcal{A}$ 为它们的交。显然 $X \in \mathcal{A}$，因为显然每一个 σ-代数都包含 X；若 $A \in \mathcal{A}$，则每个属于 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数都含有 A，因而含有 A^c，故 $A^c \in \mathcal{A}$；若 $\{A_i\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的序列，则 $\bigcup_i A_i$ 属于 $\mathcal{C}$ 中每个 σ-代数，从而也属于 $\mathcal{A}$。

但是，需要注意的是，一族 σ-代数的**并**未必是 σ-代数。先证

Corollary 1.1.1

令 X 为一个集合，$\mathcal{F}$ 为 X 的子集族。则存在包含 $\mathcal{F}$ 的 X 上 **最小** 的 σ-代数。

如果要说明 $\mathcal{A}$ 是 X 上包含 $\mathcal{F}$ 的最小 σ-代数，我们需要说明 $\mathcal{A}$ 首先是一个包含 $\mathcal{F}$ 的 σ-代数，其次要说明所有包含 $\mathcal{F}$ 的 σ-代数都包含 $\mathcal{A}$，且如果 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 都是 X 上包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 σ-代数，则 $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$，这样就可以说明包含 $\mathcal{F}$ 的最小 σ-代数是唯一的。这个 σ-代数就称作是 $\mathcal{F}$ **生成** 的 σ-代数，记作 $\sigma(\mathcal{F})$。

Proof of Corollary 1.1 Proof 1.1.2

令 $\mathcal{C}$ 为所有包含 $\mathcal{F}$ 的 X 上 σ-代数的全体，则 $\mathcal{C}$ 非空，因为幂集本身即为 σ-代数。由 Proposition 1.1 可以知道，$\mathcal{C}$ 中所有 σ-代数的交为一个 σ-代数；它包含 $\mathcal{F}$，且被每一个包含 $\mathcal{F}$ 的 σ-代数所包含。这样得到的结果就很强了，结论已经不言自明。

现在据此定义一个重要的 σ-代数族。$\mathbb{R}^d$ 上的 **Borel σ-代数** 定义为由 $\mathbb{R}^d$ 的所有**开集**生成的 σ-代数，记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$。属于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 的集合称为 $\mathbb{R}^d$ 的 **Borel 集**。当 $d = 1$ 时，通常记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$，而不是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$。

Proposition 1.1.2

实数轴上的 Borel σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可分别由下列任一集合族生成：
- $\mathbb{R}$ 的所有闭集的集合族；
- 形如 $(-\infty, b]$ 的所有半无界子区间族；
- 形如 $(a, b]$ 的所有半开子区间族。

Proof of Proposition 1.2 Proof 1.1.3

设 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ 分别为由这三条描述的集合族生成的 σ-代数。先证 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \mathcal{B}_3$，再证 $\mathcal{B}_3 \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$，这样就可以证明 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_3$。

- 由于 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 包含所有开集且在取补下封闭，它包含所有闭集，因而包含由闭集生成的 $\mathcal{B}_1$。
- 集合 $(-\infty, b]$ 为闭集，故属于 $\mathcal{B}_1$，从而 $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2$。
- 又因 $(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c$，每个 $(a, b]$ 均在 $\mathcal{B}_2$ 中，故 $\mathcal{B}_2 \supseteq \mathcal{B}_3$。
- 最后，每个开区间 (a, b) 都是一列 $(a, b]$ 型集合的并，而每个开集是开区间的并，因此每个开集属于 $\mathcal{B}_3$，从而 $\mathcal{B}_3 \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$。

在后续内容中，我们应该注意到 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 的如下性质：
- 其包含了分析中关心的每一个 $\mathbb{R}$ 的子集；
- 其又足够小，以至于可以使用构造性的方法来处理。

Proposition 1.1.3

$\mathbb{R}^d$ 上的 Borel σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 可以被下面任何一个集合族生成：

- $\mathbb{R}^d$ 的所有闭集的集合族；
- $\mathbb{R}^d$ 中所有形如 $\{(x_1, ..., x_d) : x_i \le b\}$ 的闭半空间的集合族，其中 i 是某个坐标指标，$b \in \mathbb{R}$；
- $\mathbb{R}^d$ 中所有"矩形"之集合族，它们形如 $\{(x_1, ..., x_d) : a_i < x_i \le b_i, \text{for } i = 1, ..., d\}$。

证明基本可以沿用 Proposition 1.2 的论证，因此大部分略去，只需要注意到形如 $\{(x_1, ..., x_d) : a_i < x_i \le b_i, \text{for } i = 1, ..., d\}$ 的矩形可以写成两个半空间的差就可以了。

更细致地看 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 中的一些集合。设 $\mathcal{G}$ 或者 $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的开集全体，$\mathcal{F}$ 或者 $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$ 为闭集全体。记 $\mathcal{G}_\delta$ 为 $\mathcal{G}$ 中**序列的交**所得的全体集合，$\mathcal{F}_\sigma$ 为 $\mathcal{F}$ 中**序列的并**所得的全体集合，这两个又被称为 G_δ 类和 F_σ 类，其名称中的 G 与 F 分别来自德语 Gebiet 与法语 fermé，而下标 σ, δ 分别来自德语 Summe 与 Durchschnitt 的首字母。我们有下面命题：

Proposition 1.1.4

$\mathbb{R}^d$ 的每个闭集都是 G_δ 集；而 $\mathbb{R}^d$ 的每个开集都是 F_σ 集。

Proof of Proposition 1.4 Proof 1.1.4

假设 F 为闭集。我们需要构造开集序列 $\{U_n\}$ 使 $F = \bigcap_n U_n$。令 U_n 按照如下方式进行定义：

$$U_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \exists y \in F, \|x - y\| < \frac{1}{n} \right\} \quad [1]$$

当 F 为空集时，U_n 为空集；否则每个 U_n 显然是开集，且 $F \subseteq \bigcap_n U_n$。对于反方向的结果，注意到在度量空间里，闭集等价于包含其所有收敛序列的极限点。因此对于任意的 $x \in \bigcap_n U_n$，其都是一个 F 内收敛点列的极限点，由闭集的性质可以得到 $x \in F$。因此 $F = \bigcap_n U_n$。

如果 U 是开集，则其补 U^c 为闭集，从而 U^c 是 G_δ，即存在开集列 U_n 使 $U^c = \bigcap_n U_n$。于是 $U = \bigcup_n U_n^c$，其中每个 U_n^c 闭，因此 U 为 F_σ。

单纯纠结于符号的含义是没有意义的，这个命题的含义是：$\mathbb{R}^d$ 的每个闭集都可以通过开集的序列的交得到，而每个开集都可以通过闭集的序列的并得到。

更一般地，给定任意集合族 $\mathcal{S}$，定义 $\mathcal{S}_\sigma$ 为 $\mathcal{S}$ 中序列的并得到的全体集合，$\mathcal{S}_\delta$ 为 $\mathcal{S}$ 中序列的交得到的全体集合。我们可以迭代 σ, δ 这两个操作，得到链 $\mathcal{S}_{\sigma,\delta}$ 等等。

我们讲一个序列 $\{A_n\}$ 称为是递增的，当其满足 $A_i \subseteq A_{i+1}$，同理可以定义递减的序列。

Proposition 1.1.5

设 X 为一个集合，$\mathcal{A}$ 为 X 上的一个代数。若满足下述任一条件，则 $\mathcal{A}$ 为 σ-代数：

- $\mathcal{A}$ 在递增序列的并下封闭；
- $\mathcal{A}$ 在递减序列的交下封闭。

Proof of Proposition 1.5 Proof 1.1.5

先假设第一条成立，由于 $\mathcal{A}$ 已是代数，我们只需验证它在可数并下封闭即可。设 $\{A_i\}$ 为 $\mathcal{A}$ 中的任意序列。对任意的 n，定义 $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$。则 $\{B_n\}$ 为递增列，且每个 $B_n \in \mathcal{A}$。由第一条成立知 $\bigcup_n B_n \in \mathcal{A}$。但 $\bigcup_n B_n = \bigcup_i A_i$，故 $\mathcal{A}$ 在可数并下封闭，即为 σ-代数。

假设第二条成立，只需要验证其可以推出第一条就可以。设 $\{A_i\}$ 为 $\mathcal{A}$ 中的递增数列，则 $\{A_i^c\}$ 为递减数列，且每个 $A_i^c \in \mathcal{A}$。由第二条成立知 $\bigcap_i A_i^c \in \mathcal{A}$。于是 $\bigcup_i A_i = \left(\bigcap_i A_i^c\right)^c \in \mathcal{A}$。故 $\mathcal{A}$ 在可数并下封闭，即为 σ-代数。

1.2 Measures

令 X 为一个集合，$\mathcal{A}$ 为 X 上的一个 σ-代数。对一个从定义域 $\mathcal{A}$ 到扩展半轴 $[0, +\infty]$ 的函数 μ 而言，如果对一个 $\mathcal{A}$ 上的互不相交的序列 $\{A_i\}$ 满足

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{2}$$

那么称其为 **可数可加/Countably Additive** 的函数。这里由于 $\mu(A_i) \geq 0$，右端的求和总共是存在，要么其为一个整数，要么其为 $+\infty$。

Measure Definition 1.2.1

一个 $\mathcal{A}$ 上的**测度** $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 是一个满足 $\mu(\varnothing) = 0$ 的可数可加函数。

我们也对 **有限可加/Finitely Additive** 的函数进行定义，一个有限可加的函数 $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 是一个满足

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \tag{3}$$

的函数。很容易检查，每一个可数可加的测度都是有限可加的，这只需要将可数列的后面一些项都取为空集，并且利用 $\mu(\varnothing) = 0$ 即可。从另一方面来看，有限可加的测度并不一定是可数可加的，可以很容易举出反例来。

相比于可数可加性，有限可加性更像是一个更加自然的性质。但是一方面看，可数可加性对于几乎所有的应用都足够了，并且支持很多更加强大的积分理论。因此我们更加致力于研究可数可加测度。接下来提到的没有任何特别说明的测度都指的是可数可加的测度。

Measure Space Definition 1.2.2

对于一个集合 X，$\mathcal{A}$ 为 X 上的一个 σ-代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一个测度，则三元组 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 称为一个 **测度空间/Measure Space**。若只给定 $(X, \mathcal{A})$，则称其为一个 **可测空间/Measurable Space**，对于一个测度空间，一般也称 μ 为 可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的一个测度，如果 $\mathcal{A}$ 于上下文清楚，则也称 μ 为 X 上的一个测度。

Example 1.2.1

- **计数测度**：令 X 为任意集合，$\mathcal{A}$ 为 X 上的 σ-代数。定义 $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 为 A 含有的元素的个数，如果 A 为空集，则 $\mu(A) = 0$，如果 A 为无限集，则 $\mu(A) = +\infty$。这一定义给出一个测度；常称为 $(X, \mathcal{A})$ 上的 **计数测度/Counting Measure**。
- **狄拉克测度**：令 X 为任意非空集合，$\mathcal{A}$ 为 X 上的 σ-代数，且取定 $x \in X$。定义 $\mu_\delta : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 为 $\mu_{\delta(A)} = 1$ 当且仅当 $x \in A$，否则 $\mu_{\delta(A)} = 0$。这一定义给出一个测度；常称为 $(X, \mathcal{A})$ 上的集中于 x 的 **狄拉克测度/Dirac Measure** 或者 **点质量测度/Point Mass Measure**。

Con'd　　Example 1.2.2

- 令 X 为正整数集，$\mathcal{A}$ 为 X 上的所有满足 $\boldsymbol{A}$ **或** $\boldsymbol{A^c}$ **有限** 的子集全体，则 $\mathcal{A}$ 是一个代数，但是不是 σ-代数。定义 $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 为 $\mu(A) = 1$ 当且仅当 A 为无限集，否则 $\mu(A) = 0$。这一定义给出一个有限可加的测度，但是并不能拓展到一个 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数上的可数可加测度。
- 令 X 为任意集合，$\mathcal{A}$ 为 X 上的任意一个 σ-代数。定义 $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 为 $\mu(A) = +\infty$ 当且仅当 $A \neq \varnothing$，否则 $\mu(A) = 0$。这一定义给出一个可数可加测度。
- 令 X 至少含两个元素，$\mathcal{A}$ 为 X 的幂集。定义 $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 为 $\mu(A) = 1$ 当且仅当 $A \neq \varnothing$，否则 $\mu(A) = 0$。这一定义给出的函数不是测度，甚至不是一个有限可加测度。如果我们取 A_1, A_2 两两不交且各非空，则 $\mu(A_1 \cup A_2) = 1$，而 $\mu(A_1) + \mu(A_2) = 2$。

Proposition 1.2.1

令 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个测度空间，$A, B \in \mathcal{A}$ 且 $A \subseteq B$。则 $\mu(A) \leq \mu(B)$，如果 $\mu(A) < +\infty$，则 $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$。

Proof of Proposition 1.2.1　　Proof 1.2.1

集合 A 与 $B - A$ 两两不交，且 $B = A \cup (B - A)$。由可列可加性可以得到

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \tag{4}$$

由于 $\mu(B - A) \geq 0$，所以 $\mu(B) \geq \mu(A)$。如果 $\mu(A) < +\infty$，则 $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$。

令 μ 为可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的一个测度，如果 $\mu(X) < +\infty$，则称 μ 为 **有限测度/Finite Measure**，如果存在序列 $\{A_i\}$ 满足 $X = \bigcup_i A_i$ 且 $\mu(A_i) < +\infty$，则称 μ 为 **$\boldsymbol{\sigma}$-有限测度/Sigma-Finite Measure**。更一般地来看，如果 $E \in \mathcal{A}$ 可以表示为 $\mathcal{A}$ 下有限测度集合的可数并，则称 E 在 μ 下 σ-有限。如果测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 满足 μ 是有限的或者 σ-有限的，则称这个测度空间是有限的或者 σ-有限的。

我们讲的大多数性质和构造都适用于所有的测度，但是有一些重要的定理需要用到有限性或者 σ-有限性。

Countable Subadditivity　　Proposition 1.2.2

令 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个测度空间，$\{A_k\}$ 为 $\mathcal{A}$ 中的任意序列，那么我们有下面 **可数次可加性/Countable Subadditivity**：

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{5}$$

Proof of Proposition 1.2.2　　Proof 1.2.2

按照如下方式定义 $\{B_k\}$：$B_1 = A_1$，$B_k = A_k - \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)$，那么每一个 B_k 都属于 $\mathcal{A}$，且两两不交，$\bigcup_k B_k = \bigcup_k A_k$，还满足 $\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$。这样我们就可以得到：

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \mu\left(\bigcup_k B_k\right) = \sum_k \mu(B_k) \leq \sum_k \mu(A_k). \tag{6}$$

这个定理告诉我们，可数可加性可以推出可数次可加性。

Proposition 1.2.3

令 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个测度空间：
- 如果 $\{A_k\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的递增序列，则 $\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \lim_k \mu(A_k)$；
- 如果 $\{A_k\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的递减序列，且对某个 n 有 $\mu(A_n) < +\infty$，则 $\mu\left(\bigcap_k A_k\right) = \lim_k \mu(A_k)$。

Proof of Proposition 1.2.3　　Proof 1.2.3

先证第一条。按如下方式定义序列 $\{B_k\}$：$B_1 = A_1$，$B_k = A_k - A_{k-1}$，那么每一个 B_k 都属于 $\mathcal{A}$，且两两不交，$\bigcup_k B_k = A_k$，因此就得到

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \mu\left(\bigcup_k B_k\right) = \sum_k \mu(B_k) = \lim_k \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) = \lim_k \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \lim_k \mu(A_k). \qquad [7]$$

再证第二条，我们不妨假设对于 $n = 1$ 有 $\mu(A_1) < +\infty$，按照下面方式定义 $\{C_k\}$：$C_k = A_1 - A_k$，那么 $\{C_k\}$ 是一个 $\mathcal{A}$ 中的递增序列，且满足 $\bigcup_k C_k = A_1 - \bigcap_k A_k$，因此就得到

$$\mu\left(A_1 - \bigcap_k A_k\right) = \mu\left(\bigcup_k C_k\right) = \lim_k \mu(C_k) = \lim_k \mu(A_1 - A_k) \qquad [8]$$

在 Proposition 1.2.1 中我们知道如果 $\mu(A_1) < +\infty$，则 $\mu\big(A_1 - \bigcap_k A_k\big) = \mu(A_1) - \mu\big(\bigcap_k A_k\big)$，因此就得到 $\mu\big(\bigcap_k A_k\big) = \lim_k \mu(A_k)$。

Proposition 1.2.4

令 $(X, \mathcal{A})$ 为一个可测空间，μ 为 $(X, \mathcal{A})$ 上的一个有限可加测度，如果其满足下面两条之一，那么 μ 就是一个测度：

- $\lim_k \mu(A_k) = \mu\big(\bigcup_k A_k\big)$ 对每一个 $\mathcal{A}$ 中的递增序列 $\{A_k\}$ 成立；
- $\lim_k \mu(A_k) = 0$ 对每一个 $\mathcal{A}$ 中的递减序列 $\{A_k\}$ 成立，且恒有 $\bigcap_k A_k = \varnothing$。

Proof of Proposition 1.2.4　　Proof 1.2.4

我们其实需要验证的就是可数可加性，令 $\{B_j\}$ 为 $\mathcal{A}$ 中的两两不交的序列，我们需要证明的是 $\mu\big(\bigcup_j B_j\big) = \sum_j \mu(B_j)$。

首先假设第一条成立，对每一个 k，定义 $A_k = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$，则通过有限可加性可以得到 $\mu(A_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j)$，再由第一条成立知

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_k \mu(A_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \qquad [9]$$

因此就知道 μ 是可数可加的。

再假设第二条成立，令 $A_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} B_j$，这样 A_k 是一个递减序列，然后根据有限可加性可以得到

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) + \mu(A_{k+1}) \qquad [10]$$

再由第二条成立知 $\lim_k \mu(A_{k+1}) = 0$，因此就得到 $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$，也就证明了可数可加性。

这一节的最后我们介绍一些术语：

Borel Measure　　Definition 1.2.3

在 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的测度常称为 $\mathbb{R}^d$ 上的 **Borel 测度/Borel Measure**。更一般地，若 $X \subset \mathbb{R}^d$ 为 Borel 集，$\mathcal{A}$ 为包含在 X 内的 Borel 子集所成的 σ-代数，则 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度称为 X 上的 **Borel 测度/Borel Measure**。

Continuous and Discrete Measure　　Definition 1.2.4

令 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个测度空间，如果对每个 $x \in X$ 均有 $\mu(\{x\}) = 0$，则称 μ 为 **连续测度/Continuous Measure**，如果存在一个至多可数集 $D \subset X$ 使 $\mu(D^c) = 0$，则称 μ 为 **离散测度/Discrete Measure**。

连续测度意味着所有单点集的测度都为 0，意味着整个集合的测度均匀分布。离散测度意味着一个集合的测度集中在一个至多可数集上面，意味着这个测度可以表示成一个狄拉克测度的可数并。