

# Measure Theory

Notes based on Book: *Measure Theory* by Donald L. Cohn

Last updated: **September 15, 2025**

## Contents

Chapter 1: Measures	3
1.1 Algebras and Sigma-Algebras	3
1.2 Measures	6
1.3 Outer Measures	10
1.4 Lebesgue Measure	10
1.5 Completeness and Regularity	10
1.6 Dynkin Classes	10
Chapter 2: Functions and Integrals	10
2.1 Measurable Functions	10
2.2 Properties That Hold Almost Everywhere	10
2.3 The Integral	10
2.4 Limit Theorems	10
2.5 The Riemann Integral	10
2.6 Measurable Functions Again, Complex-Valued Functions, and Image Measures	10
Chapter 3: Convergence	10
3.1 Modes of Convergence	10
3.2 Normed Spaces	10
3.3 Definition of $\mathcal{L}_p$ and $\mathcal{L}_p$	10
3.4 Properties of $\mathcal{L}_p$ and $\mathcal{L}_p$	10
3.5 Dual Spaces	10
Chapter 4: Signed and Complex Measures	10
4.1 Signed and Complex Measures	10
4.2 Absolute Continuity	10
4.3 Singularity	10
4.4 Functions of Finite Variation	10
4.5 The Duals of the $\mathcal{L}_p$ Spaces	10
Chapter 5: Product Measures	10
5.1 Constructions	10
5.2 Fubini's Theorem	10
5.3 Applications	10
Chapter 6: Differentiation	10
6.1 Change of Variable in $\mathbb{R}^d$	10
6.2 Differentiation of Measures	10
6.3 Differentiation of Functions	10
Chapter 7: Measures on Locally Compact Spaces	10
7.1 Locally Compact Spaces	10
7.2 The Riesz Representation Theorem	10
7.3 Signed and Complex Measures; Duality	10
7.4 Additional Properties of Regular Measures	11
7.5 The $\mu^*$ -Measurable Sets and the Dual of $L^1$	11
7.6 Products of Locally Compact Spaces	11
7.7 The Daniell–Stone Integral	11
Chapter 8: Polish Spaces and Analytic Sets	11
8.1 Polish Spaces	11

---

8.2 Analytic Sets .....	11
8.3 The Separation Theorem and Its Consequences .....	11
8.4 The Measurability of Analytic Sets .....	11
8.5 Cross Sections .....	11
8.6 Standard, Analytic, Lusin, and Souslin Spaces .....	11
Chapter 9: Haar Measure .....	11
9.1 Topological Groups .....	11
9.2 The Existence and Uniqueness of Haar Measure .....	11
9.3 Properties of Haar Measure .....	11
9.4 The Algebras $L^1(G)$ and $M(G)$ .....	11

## Chapter 1: Measures

$X$  是一个集合,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  是一个我们希望进行积分的函数, 因此我们需要处理  $X$  的子集的大小, 因此在这一章, 我们需要引入测度, 测度是处理这类集合大小问题的基本工具。

这章的前两节是抽象但是基础的内容, 分别介绍了  $\sigma$ -代数和测度, 我们对  $\sigma$ -代数内的集合讨论测度。第三节介绍了构造测度的一般技术, 第四节介绍了 Lebesgue 测度的基本性质。最后在第五节和第六节, 我们将介绍一些处理测度与  $\sigma$ -代数的额外基础技巧。

### 1.1 Algebras and Sigma-Algebras

#### Algebra

#### Definition 1.1.1

令  $X$  为任意集合。若  $X$  的子集族  $\mathcal{A}$  满足下列条件, 则称  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的一个 **代数/Algebra**:

- $X \in \mathcal{A}$ ;
- 对每个  $A \in \mathcal{A}$ , 其补集  $A^c \in \mathcal{A}$ ;
- 对任意有限列  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , 有  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ ;
- 对任意有限列  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , 有  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ 。

当然, 在后三条, 我们也要求了  $\mathcal{A}$  在取补、有限并与有限交下封闭。利用  $\bigcap_{i=1}^n A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)^c$ , 我们可以知道取补和有限并封闭蕴含有限交封闭, 因此可以只通过前三条定义代数。

#### Sigma-Algebra

#### Definition 1.1.2

令  $X$  为任意集合。若  $X$  的子集族  $\mathcal{A}$  满足下列条件, 则称  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的一个  **$\sigma$ -代数/ $\sigma$ -Algebra**:

- $X \in \mathcal{A}$ ;
- 对每个  $A \in \mathcal{A}$ , 其补集  $A^c \in \mathcal{A}$ ;
- 对任意可数列  $\{A_i\}$  ( $\forall A_i, A_i \in \mathcal{A}$ ), 有  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ ;
- 对任意可数列  $\{A_i\}$  ( $\forall A_i, A_i \in \mathcal{A}$ ), 有  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ 。

因此,  $X$  上的  $\sigma$ -代数就是一个包含  $X$  的子集族, 且要求在取补、可数并与可数交下封闭。与代数情形相同, 也可仅用前三条或者第一、二、四条下等价定义。下面陈述是显然的:

- 每个  $X$  上的  $\sigma$ -代数都是  $X$  上的代数, 因为有限并可视为特殊构造下的可数并。
- 可以将上述两个定义的第一条改成  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , 因为  $\emptyset \in \mathcal{A} \iff X \in \mathcal{A}$ 。
- 对于所有  $X$  上的非空的、在取补以及有限并下封闭的子集族  $\mathcal{A}$ , 有  $X \in \mathcal{A}$ , 这是因为  $X = A \cup A^c$ , 因此也可以使用  $\mathcal{A}$  非空替代条件  $X \in \mathcal{A}$ 。

若  $\mathcal{A}$  是  $X$  上的  $\sigma$ -代数, 有时把集合  $E \in \mathcal{A}$  称为  **$\mathcal{A}$ -可测/ $\mathcal{A}$ -measurable**。

#### Some Families that are or are not Algebras or Sigma-Algebras

#### Example 1.1.1

- $X$  为无限集, 令  $\mathcal{A}$  为  $X$  的所有满足  $A$  或  $A^c$  有限的  $X$  的子集全体。则  $\mathcal{A}$  是  $X$  上的代数, 但不是  $\sigma$ -代数。
  - $\mathcal{A}$  是  $X$  上的代数, 这点非常好验证, 因为有限并不改变任何性质;
  - $\mathcal{A}$  不是  $\sigma$ -代数, 如果我取一堆  $X$  的子集, 其分别只有一个元素, 那么显然其可数并不是有限的, 且其可数并的补集并不能确定一定是有限的, 可以在自然数集中找到反例。
- $X$  为不可数集, 令  $\mathcal{A}$  为  $X$  的所有可数子集全体。则  $\mathcal{A}$  不含  $X$ , 且在取补下不封闭; 因此不是代数。
- 令  $\mathcal{A}$  为所有可表示为有限个  $\mathbb{R}$  上区间的并构成的集合, 区间类型为  $(a, b]$ 、 $(a, +\infty)$  或  $(-\infty, b]$ 。则很容易检验  $\mathcal{A}$  是  $\mathbb{R}$  上的代数, 但不是  $\sigma$ -代数。
  - 可以证明有界开区间  $(a, b)$  是  $\mathcal{A}$  中集合的可数并, 但是本身并不在  $\mathcal{A}$  中。

下面考虑一下构造  $\sigma$ -代数的方法。

Proposition 1.1.1

令  $X$  为一个集合, 则  $X$  上任意的非空  $\sigma$ -代数族的交仍是  $X$  上的一个  $\sigma$ -代数。

Proof of Proposition 1.1

Proof 1.1.1

令  $\mathcal{C}$  为  $X$  上一个非空的  $\sigma$ -代数族, 令  $\mathcal{A}$  为它们的交。显然  $X \in \mathcal{A}$ , 因为显然每一个  $\sigma$ -代数都包含  $X$ ; 若  $A \in \mathcal{A}$ , 则每个属于  $\mathcal{C}$  的  $\sigma$ -代数都含有  $A$ , 因而含有  $A^c$ , 故  $A^c \in \mathcal{A}$ ; 若  $\{A_i\}$  是  $\mathcal{A}$  中的序列, 则  $\bigcup_i A_i$  属于  $\mathcal{C}$  中每个  $\sigma$ -代数, 从而也属于  $\mathcal{A}$ 。

但是, 需要注意的是, 一族  $\sigma$ -代数的并未必是  $\sigma$ -代数。先证

Corollary 1.1.1

令  $X$  为一个集合,  $\mathcal{F}$  为  $X$  的子集族。则存在包含  $\mathcal{F}$  的  $X$  上最小的  $\sigma$ -代数。

如果要说明  $\mathcal{A}$  是  $X$  上包含  $\mathcal{F}$  的最小  $\sigma$ -代数, 我们需要说明  $\mathcal{A}$  首先是一个包含  $\mathcal{F}$  的  $\sigma$ -代数, 其次要说明所有包含  $\mathcal{F}$  的  $\sigma$ -代数都包含  $\mathcal{A}$ , 且如果  $\mathcal{A}_1$  和  $\mathcal{A}_2$  都是  $X$  上包含  $\mathcal{F}$  的最小的  $\sigma$ -代数, 则  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ , 这样就可以说明包含  $\mathcal{F}$  的最小  $\sigma$ -代数是唯一的。这个  $\sigma$ -代数就称作是  $\mathcal{F}$  生成的  $\sigma$ -代数, 记作  $\sigma(\mathcal{F})$ 。

Proof of Corollary 1.1

Proof 1.1.2

令  $\mathcal{C}$  为所有包含  $\mathcal{F}$  的  $X$  上  $\sigma$ -代数的全体, 则  $\mathcal{C}$  非空, 因为幂集本身即为  $\sigma$ -代数。由 Proposition 1.1 可以知道,  $\mathcal{C}$  中所有  $\sigma$ -代数的交为一个  $\sigma$ -代数; 它包含  $\mathcal{F}$ , 且被每一个包含  $\mathcal{F}$  的  $\sigma$ -代数所包含。这样得到的结果就很强了, 结论已经不言自明。

现在据此定义一个重要的  $\sigma$ -代数族。 $\mathbb{R}^d$  上的 **Borel  $\sigma$ -代数** 定义为由  $\mathbb{R}^d$  的所有开集生成的  $\sigma$ -代数, 记为  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 。属于  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  的集合称为  $\mathbb{R}^d$  的 **Borel 集**。当  $d = 1$  时, 通常记为  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , 而不是  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ 。

Proposition 1.1.2

实数轴上的 Borel  $\sigma$ -代数  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  可分别由下列任一集合族生成:

- $\mathbb{R}$  的所有闭集的集合族;
- 形如  $(-\infty, b]$  的所有半无界子区间族;
- 形如  $(a, b]$  的所有半开子区间族。

Proof of Proposition 1.2

Proof 1.1.3

设  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$  分别为由这三条描述的集合族生成的  $\sigma$ -代数。先证  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \mathcal{B}_3$ , 再证  $\mathcal{B}_3 \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , 这样就可以证明  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_3$ 。

- 由于  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  包含所有开集且在取补下封闭, 它包含所有闭集, 因而包含由闭集生成的  $\mathcal{B}_1$ 。
- 集合  $(-\infty, b]$  为闭集, 故属于  $\mathcal{B}_1$ , 从而  $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2$ 。
- 又因  $(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c$ , 每个  $(a, b]$  均在  $\mathcal{B}_2$  中, 故  $\mathcal{B}_2 \supseteq \mathcal{B}_3$ 。
- 最后, 每个开区间  $(a, b)$  都是一列  $(a, b]$  型集合的并, 而每个开集是开区间的并, 因此每个开集属于  $\mathcal{B}_3$ , 从而  $\mathcal{B}_3 \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。

在后续内容中, 我们应该注意到  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  的如下性质:

- 其包含了分析中关心的每一个  $\mathbb{R}$  的子集;
- 其又足够小, 以至于可以使用构造性的方法来处理。

Proposition 1.1.3

$\mathbb{R}^d$  上的 Borel  $\sigma$ -代数  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  可以被下面任何一个集合族生成:

- $\mathbb{R}^d$  的所有闭集的集合族;
- $\mathbb{R}^d$  中所有形如  $\{(x_1, \dots, x_d) : x_i \leq b\}$  的闭半空间的集合族, 其中  $i$  是某个坐标指标,  $b \in \mathbb{R}$ ;
- $\mathbb{R}^d$  中所有“矩形”之集合族, 它们形如  $\{(x_1, \dots, x_d) : a_i < x_i \leq b_i, \text{ for } i = 1, \dots, d\}$ 。

证明基本可以沿用 Proposition 1.2 的论证, 因此大部分略去, 只需要注意到形如  $\{(x_1, \dots, x_d) : a_i < x_i \leq b_i, \text{ for } i = 1, \dots, d\}$  的矩形可以写成两个半空间的差就可以了。

更细致地看  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  中的一些集合。设  $\mathcal{G}$  或者  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^d)$  为  $\mathbb{R}^d$  的开集全体,  $\mathcal{F}$  或者  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$  为闭集全体。记  $\mathcal{G}_\delta$  为  $\mathcal{G}$  中序列的交所得的全体集合,  $\mathcal{F}_\sigma$  为  $\mathcal{F}$  中序列的并所得的全体集合, 这两个又被称为  $G_\delta$  类和  $F_\sigma$  类, 其名称中的  $G$  与  $F$  分别来自德语 Gebiet 与法语 fermé, 而下标  $\sigma, \delta$  分别来自德语 Summe 与 Durchschnitt 的首字母。我们有下面命题:

Proposition 1.1.4

$\mathbb{R}^d$  的每个闭集都是  $G_\delta$  集; 而  $\mathbb{R}^d$  的每个开集都是  $F_\sigma$  集。

Proof of Proposition 1.4

Proof 1.1.4

假设  $F$  为闭集。我们需要构造开集序列  $\{U_n\}$  使  $F = \bigcap_n U_n$ 。令  $U_n$  按照如下方式进行定义:

$$U_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \exists y \in F, \|x - y\| < \frac{1}{n} \right\} \quad [1]$$

当  $F$  为空集时,  $U_n$  为空集; 否则每个  $U_n$  显然是开集, 且  $F \subseteq \bigcap_n U_n$ 。对于反方向的结果, 注意到在度量空间里, 闭集等价于包含其所有收敛序列的极限点。因此对于任意的  $x \in \bigcap_n U_n$ , 其都是一个  $F$  内收敛点列的极限点, 由闭集的性质可以得到  $x \in F$ 。因此  $F = \bigcap_n U_n$ 。

如果  $U$  是开集, 则其补  $U^c$  为闭集, 从而  $U^c$  是  $G_\delta$ , 即存在开集列  $U_n$  使  $U^c = \bigcap_n U_n$ 。于是  $U = \bigcup_n U_n^c$ , 其中每个  $U_n^c$  闭, 因此  $U$  为  $F_\sigma$ 。

单纯纠结于符号的含义是没有意义的, 这个命题的含义是:  $\mathbb{R}^d$  的每个闭集都可以通过开集的序列的交得到, 而每个开集都可以通过闭集的序列的并得到。

更一般地, 给定任意集合族  $\mathcal{S}$ , 定义  $\mathcal{S}_\sigma$  为  $\mathcal{S}$  中序列的并得到的全体集合,  $\mathcal{S}_\delta$  为  $\mathcal{S}$  中序列的交得到的全体集合。我们可以迭代  $\sigma, \delta$  这两个操作, 得到链  $\mathcal{S}_{\sigma, \delta}$  等等。

我们讲一个序列  $\{A_n\}$  称为是递增的, 当其满足  $A_i \subseteq A_{i+1}$ , 同理可以定义递减的序列。

Proposition 1.1.5

设  $X$  为一个集合,  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的一个代数。若满足下述任一条件, 则  $\mathcal{A}$  为  $\sigma$ -代数:

- $\mathcal{A}$  在递增序列的并下封闭;
- $\mathcal{A}$  在递减序列的交下封闭。

Proof of Proposition 1.5

Proof 1.1.5

先假设第一条成立, 由于  $\mathcal{A}$  已是代数, 我们只需验证它在可数并下封闭即可。设  $\{A_i\}$  为  $\mathcal{A}$  中的任意序列。对任意的  $n$ , 定义  $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ 。则  $\{B_n\}$  为递增列, 且每个  $B_n \in \mathcal{A}$ 。由第一条成立知  $\bigcup_n B_n \in \mathcal{A}$ 。但  $\bigcup_n B_n = \bigcup_i A_i$ , 故  $\mathcal{A}$  在可数并下封闭, 即为  $\sigma$ -代数。

假设第二条成立, 只需要验证其可以推出第一条就可以。设  $\{A_i\}$  为  $\mathcal{A}$  中的递增数列, 则  $\{A_i^c\}$  为递减数列, 且每个  $A_i^c \in \mathcal{A}$ 。由第二条成立知  $\bigcap_i A_i^c \in \mathcal{A}$ 。于是  $\bigcup_i A_i = \left(\bigcap_i A_i^c\right)^c \in \mathcal{A}$ 。故  $\mathcal{A}$  在可数并下封闭, 即为  $\sigma$ -代数。

### 1.2 Measures

令  $X$  为一个集合,  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的一个  $\sigma$ -代数。对一个从定义域  $\mathcal{A}$  到扩展半轴  $[0, +\infty]$  的函数  $\mu$  而言, 如果对一个  $\mathcal{A}$  上的互不相交的序列  $\{A_i\}$  满足

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{2}$$

那么称其为 **可数可加/Countably Additive** 的函数。这里由于  $\mu(A_i) \geq 0$ , 右端的求和总共是存在, 要么其为一个整数, 要么其为  $+\infty$ 。

Measure

Definition 1.2.1

一个  $\mathcal{A}$  上的测度  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  是一个满足  $\mu(\emptyset) = 0$  的可数可加函数。

我们也对 **有限可加/Finitely Additive** 的函数进行定义, 一个有限可加的函数  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  是一个满足

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \tag{3}$$

的函数。很容易检查, 每一个可数可加的测度都是有限可加的, 这只需要将可数列的后面一些项都取为空集, 并且利用  $\mu(\emptyset) = 0$  即可。从另一方面来看, 有限可加的测度并不一定是可数可加的, 可以很容易举出反例来。

相比于可数可加性, 有限可加性更像是一个更加自然的性质。但是一方面看, 可数可加性对于几乎所有的应用都足够了, 并且支持很多更加强化的积分理论。因此我们更加致力于研究可数可加测度。接下来提到的没有任何特别说明的测度都指的是可数可加的测度。

Measure Space

Definition 1.2.2

对于一个集合  $X$ ,  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的一个  $\sigma$ -代数,  $\mu$  为  $\mathcal{A}$  上的一个测度, 则三元组  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  称为一个 **测度空间/Measure Space**。若只给定  $(X, \mathcal{A})$ , 则称其为一个 **可测空间/Measurable Space**, 对于一个测度空间, 一般也称  $\mu$  为可测空间  $(X, \mathcal{A})$  上的一个测度, 如果  $\mathcal{A}$  于上下文清楚, 则也称  $\mu$  为  $X$  上的一个测度。

Example 1.2.1

- **计数测度:** 令  $X$  为任意集合,  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的  $\sigma$ -代数。定义  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  为  $A$  含有的元素的个数, 如果  $A$  为空集, 则  $\mu(A) = 0$ , 如果  $A$  为无限集, 则  $\mu(A) = +\infty$ 。这一定义给出一个测度; 常称为  $(X, \mathcal{A})$  上的 **计数测度/Counting Measure**。
- **狄拉克测度:** 令  $X$  为任意非空集合,  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的  $\sigma$ -代数, 且取定  $x \in X$ 。定义  $\mu_\delta : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  为  $\mu_\delta(A) = 1$  当且仅当  $x \in A$ , 否则  $\mu_\delta(A) = 0$ 。这一定义给出一个测度; 常称为  $(X, \mathcal{A})$  上的集中于  $x$  的 **狄拉克测度/Dirac Measure** 或者 **点质量测度/Point Mass Measure**。

Con'd

Example 1.2.2

- 令  $X$  为正整数集,  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的所有满足  $A$  或  $A^c$  有限的子集全体, 则  $\mathcal{A}$  是一个代数, 但是不是  $\sigma$ -代数。定义  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  为  $\mu(A) = 1$  当且仅当  $A$  为无限集, 否则  $\mu(A) = 0$ 。这一定义给出一个有限可加的测度, 但是并不能拓展到一个  $\mathcal{A}$  生成的  $\sigma$ -代数上的可数可加测度。
- 令  $X$  为任意集合,  $\mathcal{A}$  为  $X$  上的任意一个  $\sigma$ -代数。定义  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  为  $\mu(A) = +\infty$  当且仅当  $A \neq \emptyset$ , 否则  $\mu(A) = 0$ 。这一定义给出一个可数可加测度。
- 令  $X$  至少含两个元素,  $\mathcal{A}$  为  $X$  的幂集。定义  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  为  $\mu(A) = 1$  当且仅当  $A \neq \emptyset$ , 否则  $\mu(A) = 0$ 。这一定义给出的函数不是测度, 甚至不是一个有限可加测度。如果我们取  $A_1, A_2$  两两不交且各非空, 则  $\mu(A_1 \cup A_2) = 1$ , 而  $\mu(A_1) + \mu(A_2) = 2$ 。

Proposition 1.2.1

令  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为一个测度空间,  $A, B \in \mathcal{A}$  且  $A \subseteq B$ 。则  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , 如果  $\mu(A) < +\infty$ , 则  $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$ 。

Proof of Proposition 1.2.1

Proof 1.2.1

集合  $A$  与  $B - A$  两两不交, 且  $B = A \cup (B - A)$ 。由可列可加性可以得到

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \quad [4]$$

由于  $\mu(B - A) \geq 0$ , 所以  $\mu(B) \geq \mu(A)$ 。如果  $\mu(A) < +\infty$ , 则  $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$ 。

令  $\mu$  为可测空间  $(X, \mathcal{A})$  上的一个测度, 如果  $\mu(X) < +\infty$ , 则称  $\mu$  为 **有限测度/Finite Measure**, 如果存在序列  $\{A_i\}$  满足  $X = \bigcup_i A_i$  且  $\mu(A_i) < +\infty$ , 则称  $\mu$  为  **$\sigma$ -有限测度/Sigma-Finite Measure**。更一般地来看, 如果  $E \in \mathcal{A}$  可以表示为  $\mathcal{A}$  下有限测度集合的可数并, 则称  $E$  在  $\mu$  下  $\sigma$ -有限。如果测度空间  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  满足  $\mu$  是有限的或者  $\sigma$ -有限的, 则称这个测度空间是有限的或者  $\sigma$ -有限的。

我们讲的大多数性质和构造都适用于所有的测度, 但是有一些重要的定理需要用到有限性或者  $\sigma$ -有限性。

Countable Subadditivity

Proposition 1.2.2

令  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为一个测度空间,  $\{A_k\}$  为  $\mathcal{A}$  中的任意序列, 那么我们有下面 **可数次可加性/Countable Subadditivity**:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad [5]$$

Proof of Proposition 1.2.2

Proof 1.2.2

按照如下方式定义  $\{B_k\}$ :  $B_1 = A_1, B_k = A_k - (\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)$ , 那么每一个  $B_k$  都属于  $\mathcal{A}$ , 且两两不交,  $\bigcup_k B_k = \bigcup_k A_k$ , 还满足  $\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$ 。这样我们就可以得到:

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \mu\left(\bigcup_k B_k\right) = \sum_k \mu(B_k) \leq \sum_k \mu(A_k). \quad [6]$$

这个定理告诉我们, 可数可加性可以推出可数次可加性。

Proposition 1.2.3

令  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为一个测度空间:

- 如果  $\{A_k\}$  是  $\mathcal{A}$  中的递增序列, 则  $\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \lim_k \mu(A_k)$ ;
- 如果  $\{A_k\}$  是  $\mathcal{A}$  中的递减序列, 且对某个  $n$  有  $\mu(A_n) < +\infty$ , 则  $\mu\left(\bigcap_k A_k\right) = \lim_k \mu(A_k)$ 。

Proof of Proposition 1.2.3

Proof 1.2.3

先证第一条。按如下方式定义序列  $\{B_k\}$ :  $B_1 = A_1$ ,  $B_k = A_k - A_{k-1}$ , 那么每一个  $B_k$  都属于  $\mathcal{A}$ , 且两两不交,  $\bigcup_k B_k = A_k$ , 因此就得到

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \mu\left(\bigcup_k B_k\right) = \sum_k \mu(B_k) = \lim_k \sum_{i=1}^k \mu(B_i) = \lim_k \mu\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) = \lim_k \mu(A_k). \quad [7]$$

再证第二条, 我们不妨假设对于  $n = 1$  有  $\mu(A_1) < +\infty$ , 按照下面方式定义  $\{C_k\}$ :  $C_k = A_1 - A_k$ , 那么  $\{C_k\}$  是一个  $\mathcal{A}$  中的递增序列, 且满足  $\bigcup_k C_k = A_1 - \bigcap_k A_k$ , 因此就得到

$$\mu\left(A_1 - \bigcap_k A_k\right) = \mu\left(\bigcup_k C_k\right) = \lim_k \mu(C_k) = \lim_k \mu(A_1 - A_k) \quad [8]$$

在 Proposition 1.2.1 中我们知道如果  $\mu(A_1) < +\infty$ , 则  $\mu(A_1 - \bigcap_k A_k) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_k A_k)$ , 因此就得到  $\mu(\bigcap_k A_k) = \lim_k \mu(A_k)$ 。

Proposition 1.2.4

令  $(X, \mathcal{A})$  为一个可测空间,  $\mu$  为  $(X, \mathcal{A})$  上的一个有限可加测度, 如果其满足下面两条之一, 那么  $\mu$  就是一个测度:

- $\lim_k \mu(A_k) = \mu(\bigcup_k A_k)$  对每一个  $\mathcal{A}$  中的递增序列  $\{A_k\}$  成立;
- $\lim_k \mu(A_k) = 0$  对每一个  $\mathcal{A}$  中的递减序列  $\{A_k\}$  成立, 且恒有  $\bigcap_k A_k = \emptyset$ 。

Proof of Proposition 1.2.4

Proof 1.2.4

我们其实需要验证的就是可数可加性, 令  $\{B_j\}$  为  $\mathcal{A}$  中的两两不交的序列, 我们需要证明的是  $\mu(\bigcup_j B_j) = \sum_j \mu(B_j)$ 。

首先假设第一条成立, 对每一个  $k$ , 定义  $A_k = \bigcup_{j=1}^k B_j$ , 则通过有限可加性可以得到  $\mu(A_k) = \sum_{j=1}^k \mu(B_j)$ , 再由第一条成立知

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_k \mu(A_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \quad [9]$$

因此就知道  $\mu$  是可数可加的。

再假设第二条成立, 令  $A_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} B_j$ , 这样  $A_k$  是一个递减序列, 然后根据有限可加性可以得到

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{i=1}^k \mu(B_i) + \mu(A_{k+1}) \quad [10]$$

再由第二条成立知  $\lim_k \mu(A_{k+1}) = 0$ , 因此就得到  $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$ , 也就证明了可数可加性。

这一节的最后我们介绍一些术语:

Borel Measure

Definition 1.2.3

在  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  上的测度常称为  $\mathbb{R}^d$  上的 **Borel 测度/Borel Measure**。更一般地, 若  $X \subset \mathbb{R}^d$  为 Borel 集,  $\mathcal{A}$  为包含在  $X$  内的 Borel 子集所成的  $\sigma$ -代数, 则  $(X, \mathcal{A})$  上的测度称为  $X$  上的 **Borel 测度/Borel Measure**。

Continuous and Discrete Measure

Definition 1.2.4

令  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为一个测度空间, 如果对每个  $x \in X$  均有  $\mu(\{x\}) = 0$ , 则称  $\mu$  为 **连续测度/Continuous Measure**, 如果存在一个至多可数集  $D \subset X$  使  $\mu(D^c) = 0$ , 则称  $\mu$  为 **离散测度/Discrete Measure**。

连续测度意味着所有单点集的测度都为 0，意味着整个集合的测度均匀分布。离散测度意味着一个集合的测度集中在一个至多可数集上面，意味着这个测度可以表示成一个狄拉克测度的可数并。

**1.3 Outer Measures****1.4 Lebesgue Measure****1.5 Completeness and Regularity****1.6 Dynkin Classes****Chapter 2: Functions and Integrals****2.1 Measurable Functions****2.2 Properties That Hold Almost Everywhere****2.3 The Integral****2.4 Limit Theorems****2.5 The Riemann Integral****2.6 Measurable Functions Again, Complex-Valued Functions, and Image Measures****Chapter 3: Convergence****3.1 Modes of Convergence****3.2 Normed Spaces****3.3 Definition of  $\mathcal{L}_p$  and  $\mathcal{L}_p$** **3.4 Properties of  $\mathcal{L}_p$  and  $\mathcal{L}_p$** **3.5 Dual Spaces****Chapter 4: Signed and Complex Measures****4.1 Signed and Complex Measures****4.2 Absolute Continuity****4.3 Singularity****4.4 Functions of Finite Variation****4.5 The Duals of the  $\mathcal{L}_p$  Spaces****Chapter 5: Product Measures****5.1 Constructions****5.2 Fubini's Theorem****5.3 Applications****Chapter 6: Differentiation****6.1 Change of Variable in  $\mathbb{R}^d$** **6.2 Differentiation of Measures****6.3 Differentiation of Functions****Chapter 7: Measures on Locally Compact Spaces****7.1 Locally Compact Spaces****7.2 The Riesz Representation Theorem**

**7.3 Signed and Complex Measures; Duality****7.4 Additional Properties of Regular Measures****7.5 The  $\mu^*$ -Measurable Sets and the Dual of  $L^1$** **7.6 Products of Locally Compact Spaces****7.7 The Daniell–Stone Integral****Chapter 8: Polish Spaces and Analytic Sets****8.1 Polish Spaces****8.2 Analytic Sets****8.3 The Separation Theorem and Its Consequences****8.4 The Measurability of Analytic Sets****8.5 Cross Sections****8.6 Standard, Analytic, Lusin, and Souslin Spaces****Chapter 9: Haar Measure****9.1 Topological Groups****9.2 The Existence and Uniqueness of Haar Measure****9.3 Properties of Haar Measure****9.4 The Algebras  $L^1(G)$  and  $M(G)$**